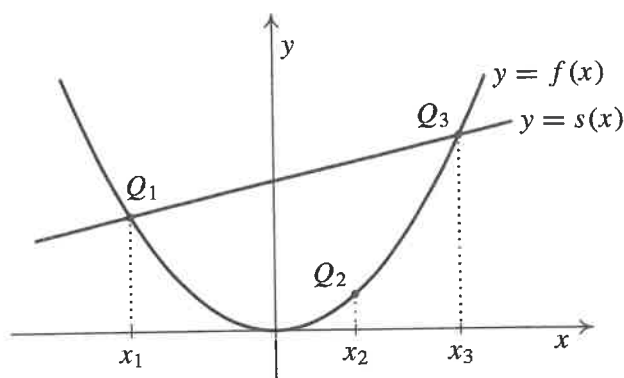


§ 13. 9.3 Konvexnost, konkávnost *funkce, inflexní body*

V předchozích podkapitolách jsme se naučili vyšetřovat monotonii dané funkce a určit, ve kterých bodech nabývá funkce lokálních extrémů. To spolu se znalostí definičního oboru, spojitosti, příp. sudosti, lichosti a periodičnosti umožňuje vytvořit si hrubou představu o grafu této funkce. Prozatím však neumíme rozhodnout o tom, zda je graf funkce mezi dvěma body „prohnutý dolů“ nebo „nahoru“. Podívejme se na tuto situaci podrobněji.



Obr. 9.4: Graf konvexní funkce

Nechť f je funkce, jejíž graf je znázorněn na obr. 9.4. Nechť I je interval. Zvolme tři body x_1, x_2, x_3 z tohoto intervalu tak, aby platilo $x_1 < x_2 < x_3$. Sestrojme sečnu s grafu funkce f procházející body $(x_1, f(x_1)), (x_3, f(x_3))$ — viz obr. 9.4. Zkoumejme nyní, zda bod $(x_2, f(x_2))$ leží „nad“ anebo „pod sečnou“ s . Z obrázku vidíme, že leží „pod sečnou“. Pokud bychom zvolili jiný bod x_2 ležící „mezi“ body x_1 a x_3 , opět bude ležet „pod sečnou“. Pokud tato skutečnost platí i pro libovolnou volbu všech tří bodů x_1, x_2, x_3 (se zachováním výchozího vztahu $x_1 < x_2 < x_3$) z intervalu I , pak budeme říkat, že *funkce f je ryze konvexní na intervalu I* .

Nyní předchozí úvahy zpřesníme. Nechť $I \subset D(f)$ je interval, $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Chceme určit rovnici sečny procházející body $(x_1, f(x_1)), (x_3, f(x_3))$.

Víme, že rovnice přímky procházející danými body $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ ($a_1 \neq b_1$) je dána vztahem $y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1)$. S využitím tohoto vztahu dostáváme rovnici sečny

$$s: y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Skutečnost, že bod $(x_2, f(x_2))$ leží „pod sečnou“, můžeme zapsat takto:

$$f(x_2) < s(x_2)$$

neboli

$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

Podstatný je zde znak $<$. Signalizuje, že bod leží „pod sečnou“.

Nyní shrňme získané poznatky do definice.

Viz HU – str. 73

Definice 9.22. Řekneme, že funkce f je *ryze konvexní na intervalu* $I \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in I$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

Nahradíme-li v definici znak $<$ znakem $\leq$, dostáváme funkci *konvexní na* I . Je-li $I = D(f)$, pak říkáme, že funkce f je *ryze konvexní*, resp. *konvexní*.

Poznámka 9.23.

- Definice říká, že funkce f je *ryze konvexní na intervalu* I , jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in I$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $Q_2 = (x_2, f(x_2))$ pod sečnou určenou body $Q_1 = (x_1, f(x_1))$, $Q_3 = (x_3, f(x_3))$. Funkce je *konvexní*, jestliže bod Q_2 leží pod sečnou nebo na sečně určené body Q_1, Q_3 . *Někdy se ryze konvexní funkce nazývá i funkce nad sečnou.*
Příkladem funkce, která není ryze konvexní, ale je konvexní na $\mathbb{R}$, je funkce absolutní hodnota — graf viz příklad 3.6.
- Podmínka v definici musí být splněna pro každou trojici bodů z I . Nestačí nalézt tři body x_1, x_2, x_3 , pro něž je podmínka splněna. Např. pro funkci $f: y = x^3$ a body $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$ platí $f(x_2) = 0$,

$$s(x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) = -1 + \frac{8 + 1}{3} \cdot 1 = 2,$$

tj. $0 < 2$. Tedy podmínka z definice je pro body $-1, 0, 2$ splněna, ale funkce f není ryze konvexní na $\mathbb{R}$ — viz obr. 9.5 a).

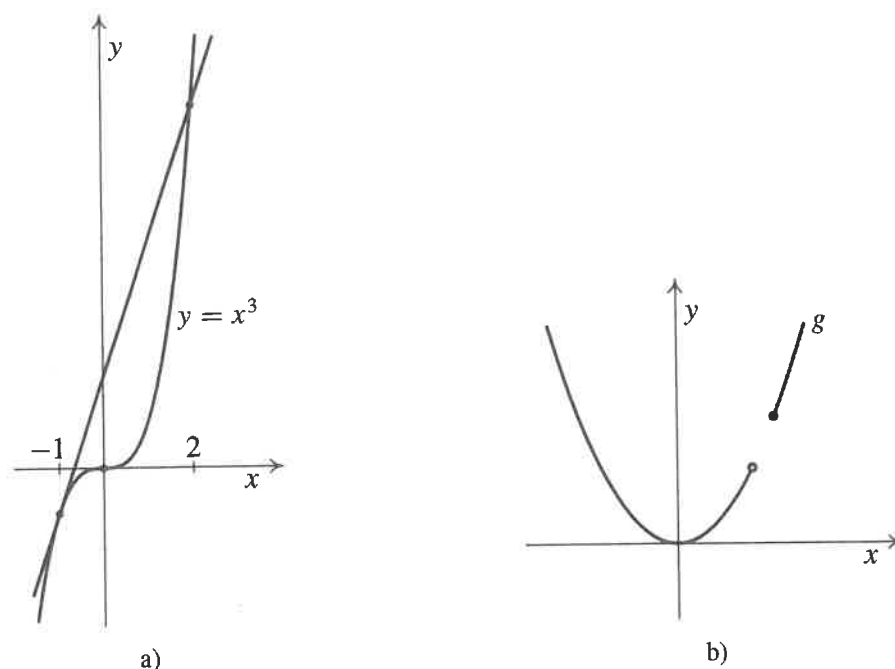
- I v definici musí být interval! Např. funkce g , jejíž graf je znázorněn na obr. 9.5 b), není ryze konvexní ani konvexní na svém definičním oboru.

Analogicky lze z geometrické interpretace dojít k pojmu *ryze konkávní funkce*. Jedná se zde o situaci, kdy bod $(x_2, f(x_2))$ leží „nad sečnou“ grafu funkce f procházející body $(x_1, f(x_1)), (x_3, f(x_3))$ — viz obr. 9.6.

Definice 9.24. Řekneme, že funkce f je *ryze konkávní na intervalu* $I \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in I$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) > f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

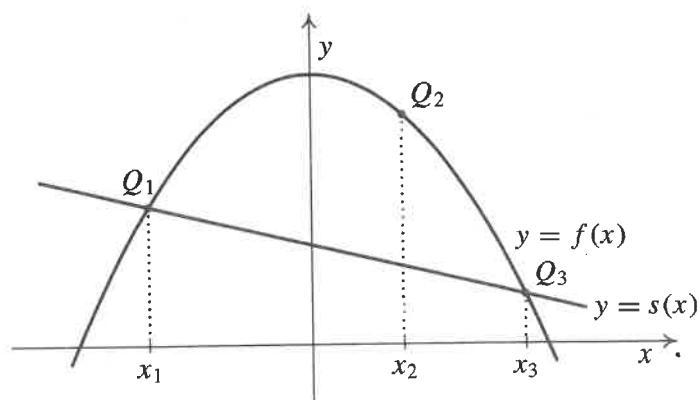
Nahradíme-li v definici znak $>$ znakem $\geq$, dostáváme funkci *konkávní na* I . Je-li $I = D(f)$, pak říkáme, že funkce f je *ryze konkávní*, resp. *konkávní*.



Obr. 9.5

Poznámka 9.25.

1. Definice říká, že funkce f je **ryze konkávní** na intervalu I , jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in I$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $Q_2 = (x_2, f(x_2))$ nad sečnou určenou body $Q_1 = (x_1, f(x_1))$, $Q_3 = (x_3, f(x_3))$. Funkce je **konkávní**, jestliže bod Q_2 leží nad sečnou nebo na sečně určené body Q_1, Q_3 . *někdy se ryze konkávní funkce nazývá jen funkcí pod sečnou.*
2. Obdobně jako u definice konvexní funkce zdůrazněme, že podmínka musí být splněna pro každou trojici bodů z I a že I musí být interval.
3. Funkce konvexní, resp. konkávní, nemusí mít derivaci v I (k zavedení pojmů pomocí



Obr. 9.6: Graf konkávní funkce

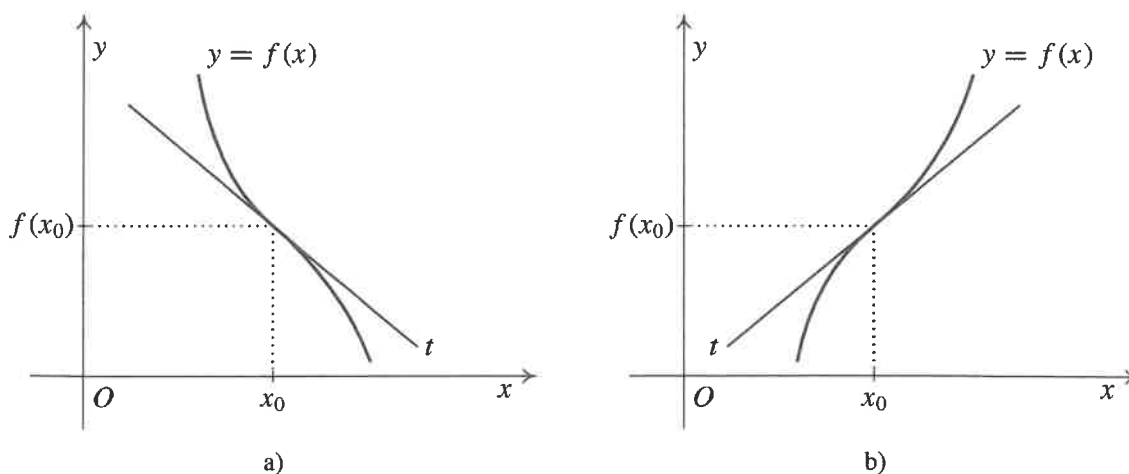
sečny existenci derivace nepotřebujeme) — viz např. výše zmíněná funkce $f: y = |x|$ nebo funkce $f: y = 2|x - 3| + 3|x + 2|$, jejíž graf je na str. 331. Pokud má funkce f všude v I první derivaci, pak lze pojmy konvexnost a konkávnost zavést také „pomocí tečen“ (viz [7, 10]).

Pokud má funkce f všude v I nejen první derivaci, ale i druhou, pak o tom, zda je funkce f na intervalu I ryze konvexní, resp. ryze konkávní, můžeme rozhodnout užitím věty 9.28. Než si ale uvedeme tuto větu, která bude snadným vodítkem při počítání příkladů, zavedeme si ještě jeden pojem. Řekneme si, jak se říká bodu, v němž se mění „prohnutí“, tj. konvexnost na konkávnost a opačně.

Definice 9.26. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *inflexi*, jestliže existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ a funkce f je v nějakém levém okolí bodu x_0 ryze konvexní a v nějakém pravém okolí tohoto bodu ryze konkávní, resp. naopak.

Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi, pak bod $(x_0, f(x_0))$ nazýváme *inflexním bodem* funkce f .

V inflexním bodě tedy musí existovat tečna (funkce zde má vlastní derivaci) a mění se zde „konvexnost na konkávnost“ — viz obr. 9.7 a) — anebo naopak — viz obr. 9.7 b).

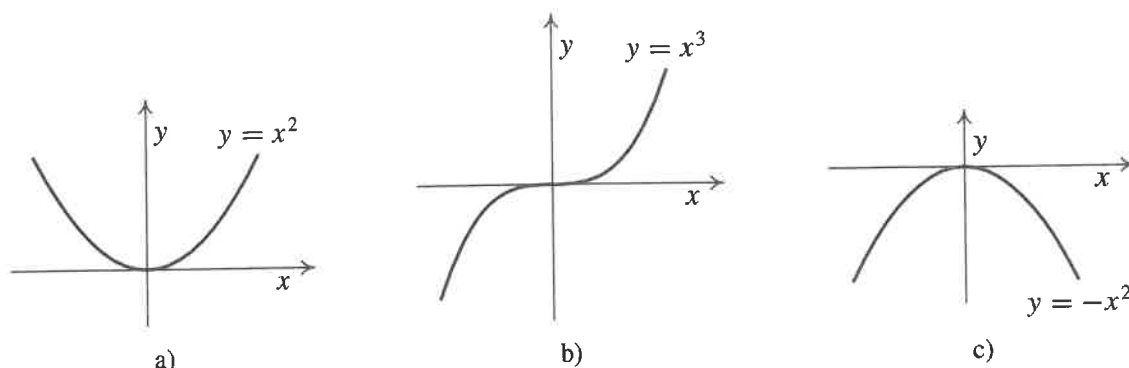


Obr. 9.7

Příklad:

Poznámka 9.27.

1. Funkce $f: y = x^2$ je ryze konvexní na $\mathbb{R}$, a tudíž nemá žádný inflexní bod — viz obr. 9.8 a).
2. Funkce $f: y = x^3$ je ryze konvexní na $(0, \infty)$ a ryze konkávní na $(-\infty, 0)$. V bodě 0 existuje první derivace a mění se zde konkávnost na konvexnost, tedy bod 0 je inflexním bodem funkce f . Všimněme si, že $f''(0) = 0$ a $f''(x) = 6x > 0$ pro všechna $x > 0$ a $f''(x) = 6x < 0$ pro všechna $x < 0$ — viz obr. 9.8 b).



Obr. 9.8

3. Funkce $f: y = -x^2$ je ryze konkávní na celém $\mathbb{R}$, tudíž nemá žádný inflexní bod — viz obr. 9.8 c).

Jak souvisí pojmy ryzí konvexnost, ryzí konkávnost a inflexní bod s vlastnostmi druhé derivace, ukazuje následující věta.

V.13.1.

Věta 9.28. *Nechť má funkce f v intervalu (a, b) druhou derivaci. Je-li*

- i) $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f ~~ryze~~ konvexní na (a, b) ,
- ii) $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f ~~ryze~~ konkávní na (a, b) ,
- iii) $f''(x_0) = 0$ v nějakém bodě $x_0 \in (a, b)$ a dále je f'' kladná v nějakém levém okolí bodu x_0 a záporná v nějakém pravém okolí bodu x_0 , resp. naopak, pak má funkce f v bodě x_0 inflexi.

Poznámka 9.29.

1. Srovnajte větu 9.28 (podmínka pro ryzí konvexnost a konkávnost) s větou 9.17 (podmínka pro lokální extrém).
2. Pokud má f na celém (a, b) druhou derivaci, inflexe může nastat pouze v bodě, kde $f''(x) = 0$ — to je „podezřelý“ bod. Zda inflexe opravdu nastává, rozhodneme podle intervalů ryzí konvexnosti a konkávnosti dané funkce. Všimněte si analogie s hledáním lokálních extrémů. Tam nás zajímaly nulové body a znaménko první derivace. Zde nás zajímají nulové body a znaménko druhé derivace.
3. V konkrétních příkladech budeme uvádět *maximální intervaly, na nichž je funkce ryze konvexní, resp. ryze konkávní*. Tím budeme rozumět intervaly, které nejsou podmnožinou nějakého „většího“ intervalu, na kterém by byla daná funkce ještě ryze konvexní, resp. ryze konkávní. Konvexnost (konkávnost) funkce je definována (9.22, 9.24) pro libovolné intervaly I , kdežto ve větě 9.28 se mluví pouze o otevřených intervalech. Při hledání maximálních intervalů, na nichž je funkce konvexní (konkávní), si tedy budeme všimnat i krajních bodů příslušných intervalů. Jestliže bude daná funkce v krajním bodě intervalu spojitá, pak lze tento bod zahrnout do příslušného intervalu, na němž je funkce konvexní (konkávní). Důkaz viz [7, str. 177].

Shrňme si naše dosavadní poznatky do jakéhosi návodu, jak postupovat při hledání inflexních bodů a maximálních intervalů, na nichž je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní:

1. Určíme $D(f)$.
2. Vypočteme f' a $D(f')$.
3. Vypočteme f'' a $D(f'')$.
4. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná (předpokládáme přitom, že $D(f'')$ lze vyjádřit jako sjednocení disjunktních intervalů J_i a že f'' je spojitá na každém z těchto intervalů):
 - a) Určíme nulové body f'' , tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.
 - b) Každý interval J_i rozdělíme nulovými body f'' na disjunktní intervaly.
 - c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f'' v tomto bodě.
5. Určíme intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní (s využitím věty 9.28), a určíme inflexní body (v bodě $x_0 \in D(f)$ takovém, že $f'(x_0)$ existuje a navíc se mění konvexnost na konkávnost nebo naopak, nastává inflexe).

Poznamenejme, že intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná můžeme určit i jinak, než je uvedeno v bodě 4), a to vyřešením nerovnic $f''(x) > 0$ a $f''(x) < 0$.

Příklad 9.30. Necht' je funkce f zadána předpisem

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3.$$



Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, a inflexní body funkce f .

Řešení.

1. Určíme definiční obor: $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočteme první derivaci a její definiční obor:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 7, \quad D(f') = D(f).$$

3. Vypočteme druhou derivaci a její definiční obor:

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24, \quad D(f'') = D(f).$$

4. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.

- a) Určíme nulové body f'' , tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$$

- b) $D(f'')$ rozdělíme nulovými body f'' na disjunktní intervaly:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 2), \quad (2, \infty).$$

c) Vybereme z každého intervalu jeden bod, např. -2 , 0 a 3 , a určíme znaménko f'' v tomto bodě.

$$f''(-2) = 48 > 0, \quad f''(0) = -24 < 0, \quad f''(3) = 48 > 0.$$

Tudíž dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je funkce f'' kladná na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$ a záporná na intervalu $(-1, 2)$.

5. Dle věty 9.28 je tedy funkce f ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-1, 2)$. Body $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ jsou inflexními body funkce f . Znaménka druhé derivace a konvexnost resp. konkávnost na příslušných intervalech můžeme vyznačit nad číselnou osu nebo do tabulky. Přitom oblouček $\cup$ bude značit ryze konvexní část funkce a oblouček $\cap$ ryze konkávní část funkce f . Plus a minus označuje znaménko druhé derivace.

$$f'': \quad \begin{array}{c} \cup \\ + \end{array} \quad \begin{array}{c} \cap \\ - \end{array} \quad \begin{array}{c} \cup \\ + \end{array}$$

-1 2
inf inf

Tabulka:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, \infty)$
f''	+	0	-	0	+
f	$\cup$	inf.	$\cap$	inf.	$\cup$

6. Závěr: Vzhledem ke spojitosti funkce na $\mathbb{R}$ platí, že funkce f je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-1, 2)$. Body $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ jsou inflexními body funkce f . ▲



Příklad 9.31. Je dána funkce

$$f: y = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, a určete její inflexní body.

Řešení.

1. $D(f) = \mathbb{R}$.

2. První derivace a její definiční obor:

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2x \right) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

3. Druhá derivace a její definiční obor:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} (-x)(1 - x^2) + e^{-\frac{x^2}{2}} (-2x) = \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} (-x + x^3 - 2x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 3) = \\ &= x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad D(f'') = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.

a) Určíme nulové body f'' , tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.

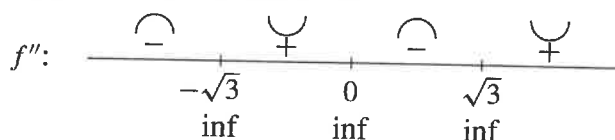
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3}.$$

b) $D(f'')$ rozdělíme nulovými body f'' na disjunktní intervaly:

$$(-\infty, -\sqrt{3}), \quad (-\sqrt{3}, 0), \quad (0, \sqrt{3}), \quad (\sqrt{3}, \infty).$$

c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f'' v tomto bodě. Výsledek je shrnut v následující tabulce.

5. Na základě znaménka f'' určíme intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce f . Výsledek zapíšeme nad číselnou osu



nebo do tabulky:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f''	-	0	+	0	-	0	+
f	$\cap$	inf.	$\cup$	inf.	$\cap$	inf.	$\cup$

6. Závěr: Vzhledem ke spojitosti funkce f na $\mathbb{R}$ platí, že je ryze konkávní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$ a ryze konvexní na intervalech $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, \infty)$. Body $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$ jsou inflexními body funkce f . ▲

Příklad 9.32. Je dána funkce

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = \sqrt[5]{x^3}.$$



Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, a určete její inflexní body.

Řešení.

1. $D(f) = \mathbb{R}$.

2. První derivace a její definiční obor:

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3. Druhá derivace a její definiční obor:

$$f''(x) = \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{5}\right)x^{-\frac{7}{5}} = -\frac{6}{25}\sqrt[5]{\frac{1}{x^7}}, \quad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

4. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.

a) Určíme nulové body f'' , tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$. Vzhledem k tomu, že je neznámá jen ve jmenovateli, nemá rovnice $f''(x) = 0$ žádné řešení. Nemáme tedy žádný nulový bod f'' .

b) Nyní máme rozdělit každý z intervalů tvořících $D(f'')$ nulovými body f'' na disjunktní intervaly. Žádné nulové body nejsou, dostáváme tedy intervaly:

$$(-\infty, 0), \quad (0, \infty).$$

c) Vybereme z každého intervalu jeden bod, např. -1 a 1 , a určíme znaménko f'' .

$$f''(-1) = -\frac{6}{25} \sqrt[5]{\frac{1}{(-1)^7}} > 0, \quad f''(1) = -\frac{6}{25} \sqrt[5]{\frac{1}{1^7}} < 0.$$

Tedy podle Cauchyovy-Bolzanovy věty je funkce f'' kladná na intervalu $(-\infty, 0)$ a záporná na intervalu $(0, \infty)$.

5. Dle věty 9.28 je funkce f ryze konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$ a ryze konkávní na intervalu $(0, \infty)$. Otázkou je, zda je bod 0 inflexním bodem funkce f . V bodě 0 se mění charakter funkce z konvexní na konkávní, ale neexistuje v tomto bodě první derivace! Bod $x = 0$ není inflexním bodem funkce f . Výsledek zapíšeme nad číselnou osu

$$f'': \quad \begin{array}{c} \cup \\ + \end{array} \quad \begin{array}{c} \cap \\ - \end{array}$$

0

nebo do tabulky:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f''	+	neexistuje	-
f	$\cup$		$\cap$

6. Závěr: Funkce f je ryze konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$ a ryze konkávní na intervalu $(0, \infty)$. Funkce nemá žádné inflexní body. ▲



Pro zájemce:

V dalším příkladě budeme k určení intervalů, na nichž je druhá derivace kladná, resp. záporná, využívat řešení nerovnic. Zkuste si jej spočítat také již výše uvedeným postupem, tj. pomocí Cauchyovy-Bolzanovy věty.



Příklad 9.33. Necht' je funkce f zadána předpisem

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, a inflexní body funkce f .

6. Závěr: Vzhledem ke spojitosti funkce f na $\mathbb{R}$ platí, že funkce je ryze konkávní na intervalu $\langle -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \rangle$ a ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ a $\langle \sqrt{2}/2, \infty \rangle$. Body $x_1 = -\sqrt{2}/2$, $x_2 = \sqrt{2}/2$ jsou inflexními body funkce f . ▲

§ 17. 9.4 Asymptoty grafu funkce

V této podkapitole se seznámíme s pojmem asymptota grafu funkce. Ze střední školy známe pojem asymptoty v souvislosti s hyperbolou. Je to přímka, ke které se hyperbola „neomezeně přibližuje“. Ukazuje se výhodné rozlišit asymptoty podle toho, zda jsou rovnoběžné s osou y nebo ne.

A) Svislé asymptoty – asymptoty bez směrnice

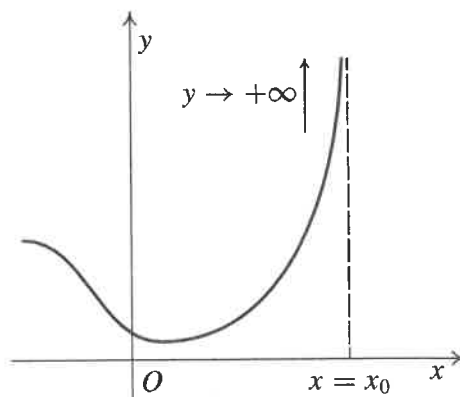
Definice 9.34. Přímka $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá *svislá asymptota grafu funkce f* , jestliže je alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě x_0 nevlastní, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Pro svislé asymptoty se někdy používá název *asymptoty bez směrnice*.

To, že je přímka $x = x_0$ svislou asymptotou grafu funkce f , geometricky znamená, že pokud se blížíme k bodu x_0 zleva nebo zprava, body grafu funkce f se „blíží“ (pro $y \rightarrow \infty$, resp. $y \rightarrow -\infty$) k bodům přímky $x = x_0$ — viz obr. 9.9.

Pokud je funkce v nějakém bodě spojitá, nemůže zde mít svislou asymptotu, protože v tomto případě by limita byla rovna přímo funkční hodnotě a funkční hodnota nemůže být nekonečná. Případají v úvahu tedy pouze ty body $x_0 \in \mathbb{R}$, na jejichž $\mathcal{D}^+(x_0)$ nebo $\mathcal{D}^-(x_0)$ je funkce definována, ale není v tomto bodě spojitá.



Obr. 9.9

Příklad 9.35. Najděte svislé asymptoty grafu funkcí:

a) $f: y = \frac{1}{x^2},$

b) $g: y = 5x + \frac{\sin x}{x}.$



Řešení.

- a) Nejprve určíme definiční obor: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkce f je spojitá v každém bodě $D(f)$, tedy jediný bod, ve kterém by mohla být svislá asymptota, je bod $x_0 = 0$. Vypočteme limitu zprava funkce f v tomto bodě:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \cdot \infty = \infty.$$

Můžeme tedy říci, že přímka $x = 0$ je svislou asymptotou grafu funkce f .

(Všimněte si, že ke konstatování, že přímka $x = 0$ je svislou asymptotou grafu funkce f , nepotřebujeme znát limitu zleva. Stačí, když je jedna z jednostranných limit rovna plus anebo minus nekonečnu.

- b) Nejprve určíme definiční obor: $D(g) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkce g je spojitá v každém bodě $D(g)$, tedy jediný bod, ve kterém by mohla být svislá asymptota, je opět bod $x_0 = 0$. Vypočteme limitu funkce g v bodě nula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(5x + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 5x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1.$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$, je i každá z jednostranných limit rovna jedné. Graf funkce g tudíž nemá v bodě nula svislou asymptotu. Jiný bod nepřipadá v úvahu, můžeme tedy říci, že graf funkce g nemá žádné svislé asymptoty. ▲

b) Asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$ – asymptoty se směrnici

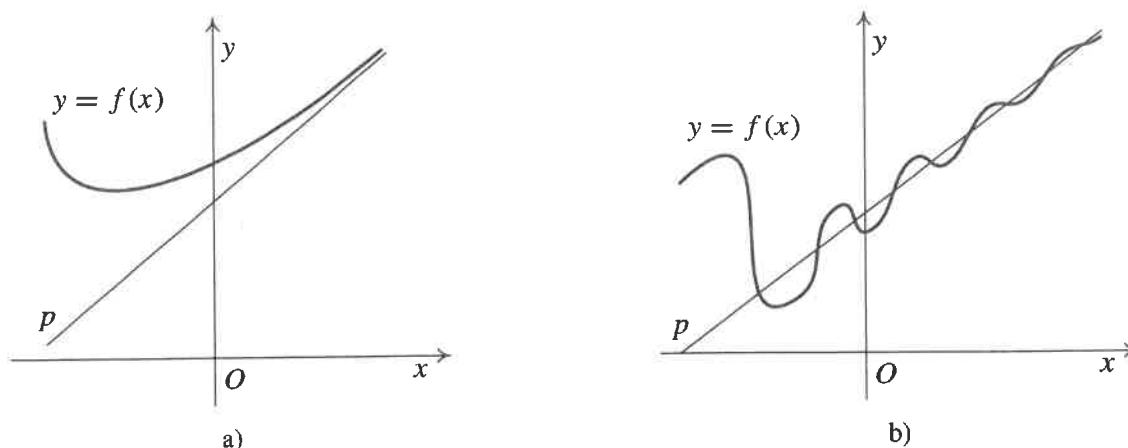
Definice 9.36. Přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, se nazývá *asymptota grafu funkce f v plus nekonečnu*, resp. *v minus nekonečnu*, jestliže platí:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Pro asymptoty v plus a minus nekonečnu se někdy používá název *asymptoty se směrnici* nebo *šikmé asymptoty*.

To, že je přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, asymptotou grafu funkce f v plus nekonečnu, geometricky znamená, že pokud se blížíme k plus nekonečnu, „body grafu funkce se blíží k bodům této přímky“. Obdobně pro asymptotu v minus nekonečnu. Asymptoty v plus a minus nekonečnu nemusí existovat současně, a pokud existují, mohou být různé.

Uvědomte si, že nevíme, zda se graf funkce k asymptotě přibližuje shora (obr. 9.10 a)), resp. zdola nebo zda kolem asymptoty „osciluje“ (obr. 9.10 b)).



Obr. 9.10

V. 14.1.

Věta 9.37. *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou grafu funkce f v plus nekonečnu, právě když*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou grafu funkce f v minus nekonečnu, právě když

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Při výpočtu asymptoty grafu funkce f v $+\infty$ postupujeme následujícím způsobem:

1. Zjistíme, zda existuje $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Jestliže neexistuje nebo je nevlastní, funkce nemá asymptotu v $+\infty$. Pokud limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existuje a je vlastní, položíme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a přistoupíme k dalšímu bodu.
2. Zjistíme, zda existuje $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$. Jestliže neexistuje nebo je nevlastní, funkce nemá asymptotu v $+\infty$. Jestliže $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ existuje a je vlastní, položíme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$.
3. Jestliže obě limity existovaly a byly vlastní, pak je přímka $y = ax + b$ asymptotou grafu funkce f v $+\infty$.

Analogicky postupujeme při výpočtu asymptoty grafu funkce f v $-\infty$.



Příklad 9.38. Najděte asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$ grafu funkce $f: y = \frac{3x^2}{x-1}$.

Řešení. Pokusíme se o současný provedení výpočtu pro asymptoty v $+\infty$ i v $-\infty$. Vyjde

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2 - x} = 3 = a, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2}{x-1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 3x^2 + 3x}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3 = b.\end{aligned}$$

Graf funkce f má šikmou asymptotu v plus i minus nekonečno, a tou je přímka o rovnici $y = 3x + 3$.

Příklad 9.39. Najděte všechny asymptoty grafu funkce $f: y = \frac{4+x^3}{4-x^2}$.



Řešení.

1. Svislé asymptoty.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, f je spojitá ve všech bodech, kde je definována. Není definována v bodech $-2, 2$. Pro hledání svislých asymptot připadají tedy v úvahu pouze tyto dva body.

Vypočteme jednostranné limity v bodech $-2, 2$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4+x^3}{4-x^2} \stackrel{\frac{\infty}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4+x^3}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4+x^3}{2+x} \cdot \frac{1}{2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4+x^3}{2+x} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2-x}.\end{aligned}$$

První limitu vypočteme dosazením (jedná se o spojitou funkci v bodě 2, tedy limita se rovná funkční hodnotě),

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \stackrel{\frac{\infty}{0}}{=} \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4+x^3}{2+x} = \frac{4+2^3}{2+2} = 3.$$

Druhou limitu vypočteme užitím věty 6.53. Označme $g(x) = 2-x$. Pak $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x) = 0$ a funkce g je na pravém prstencovém okolí bodu 2 záporná, tudíž dle věty 6.53 je

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty, \quad \text{takže} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Přímka $x = 2$ je tedy svislou asymptotou grafu funkce f .

Zbývá zjistit, zda přímka $x = -2$ je také svislou asymptotou grafu funkce f . Postupně dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4+x^3}{4-x^2} \stackrel{\frac{\infty}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4+x^3}{(2-x)(2+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4+x^3}{2-x} \cdot \frac{1}{2+x} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4+x^3}{2-x} \cdot \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{2+x}.\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \stackrel{\frac{\infty}{0}}{=} \infty$

První limitu vypočteme dosazením, tj.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4+x^3}{2-x} = \frac{4+(-2)^3}{2-(-2)} = -1.$$

Druhou limitu vypočteme opět užitím věty 6.53. Označme $g(x) = 2+x$. Pak platí $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = 0$ a funkce g je na pravém prstencovém okolí bodu -2 kladná, tedy dle věty 6.53 je

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{2+x} = +\infty, \quad \text{takže} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1 \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Přímka $x = -2$ je také svislou asymptotou grafu funkce f .

Graf funkce f má dvě svislé asymptoty: $x = 2$, $x = -2$.

2. Asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$. Opět se pokusíme o současné provedení výpočtu pro $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{4+x^3}{4-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4+x^3}{x \cdot (4-x^2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4+x^3}{4x-x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \cdot \left(\frac{4}{x^3} + 1\right)}{x^3 \cdot \left(\frac{4}{x^2} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{4}{x^3} + 1}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1 = a. \end{aligned}$$

Vypočetli jsme $a = -1$. Přistoupíme tedy k výpočtu další limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{4+x^3}{4-x^2} - (-1) \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{4+x^3}{4-x^2} + x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4+x^3+4x-x^3}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4+4x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \cdot \left(\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(\frac{4}{x^2} - 1\right)} = 0 = b. \end{aligned}$$

Šikmou asymptotou grafu funkce f v plus i minus nekonečno je přímka $y = -x$.

3. Závěr: Svislými asymptotami grafu funkce f jsou přímky $x = 2$ a $x = -2$ a asymptotou v plus i minus nekonečno je přímka $y = -x$ — viz obr. 9.11 a). ▲



Příklad 9.40. Najděte všechny asymptoty grafu funkce $f: y = \frac{e^x}{x+1}$.

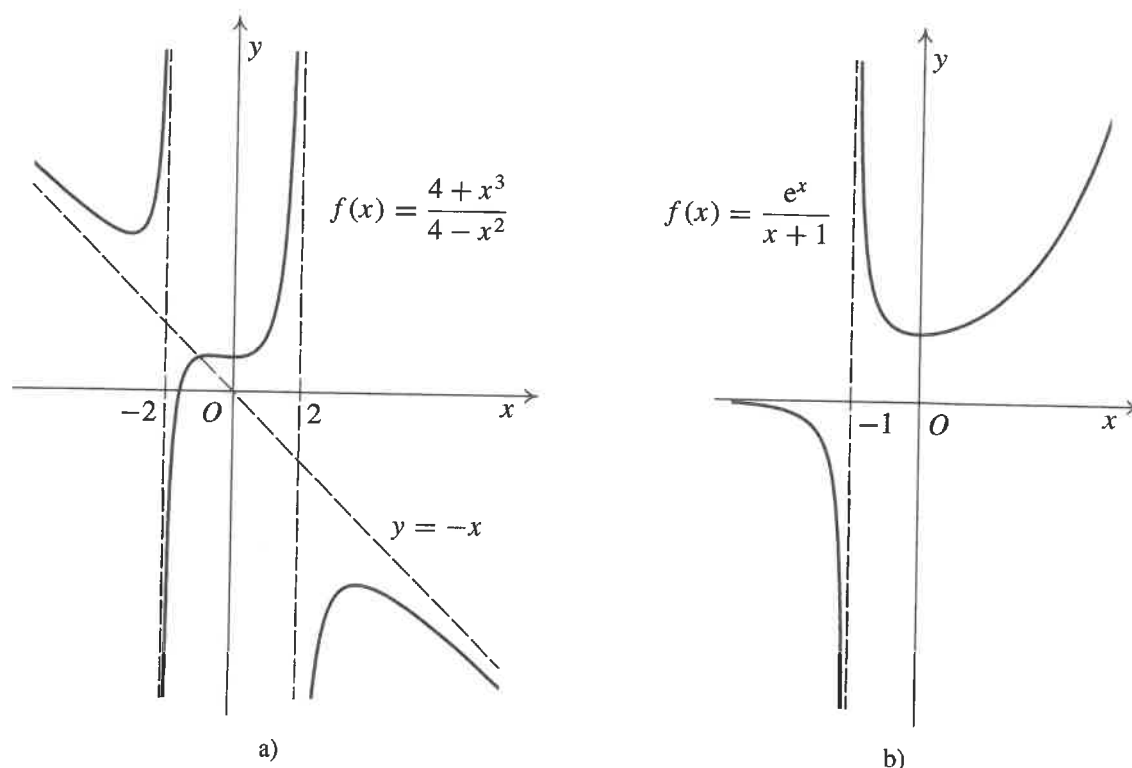
Řešení.

1. Svislé asymptoty.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f je spojitá ve všech bodech, kde je definována. Svislá asymptota může tedy nastat pouze v jediném bodě $x = -1$.

Vypočteme jednostrannou limitu v bodě -1 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^x}{x+1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{-1} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{e} \cdot (+\infty) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^x}{x+1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} -\infty \end{aligned}$$



Obr. 9.11

(Při výpočtu $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1}$ jsme využili větu 6.53. Označíme-li $g(x) = x + 1$, pak platí $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) = 0$ a funkce g je na pravém prstencovém okolí bodu -1 kladná. Tudíž dle věty 6.53 je $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$.)

Přímka $x = -1$ je tedy svislou asymptotou grafu funkce f .

2. Asymptota v $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + x} \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x + 1} \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Limita je nevlastní, tedy graf funkce f nemá asymptotu v $+\infty$.

3. Asymptota v $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + x} = 0 = a.$$

Vypočetli jsme $a = 0$. Přistoupíme k výpočtu další limity.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x}{x+1} - 0x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} = 0 = b.$$

Asymptotou v $-\infty$ grafu funkce f je přímka $y = 0$.

4. Závěr: Svislou asymptotou grafu funkce f je přímka $x = -1$ a asymptotou v minus nekonečnu je přímka $y = 0$. Asymptota v plus nekonečnu není — viz obr. 9.11 b). ▲

§ 15. 9.5 Průběh funkce

Výzkumná funkce pro nás $y = f(x)$ k nám nejdříve:

Poznatky, které jsme získali v předchozích odstavcích, nám umožňují načrtnout graf funkce. Říkáme, že *vyšetřujeme průběh funkce*. Postup, který se skládá z řady dílčích úloh, shrneme do následujících bodů:

- 1) 1. Určíme **definiční obor**.
2. Rozhodneme, kde je funkce spojitá, určíme příp. **body nespojitosti**, *mezi nimi body, které nejdříve*.
3. Rozhodneme, zda je funkce sudá nebo lichá, příp. periodická.
- 2) 4. Vypočteme f' a $D(f')$.
5. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná (předpokládáme přitom, že $D(f')$ lze vyjádřit jako sjednocení disjunktních intervalů J_i a že f' je spojitá na každém z těchto intervalů):
 - a) Určíme nulové body f' , tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$.
 - b) Každý interval J_i rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly.
 - c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f' v tomto bodě.
6. Určíme **intervaly monotonie funkce** f (s využitím věty 9.1) a **lokální extrémy** — v bodě $x_0 \in D(f)$, kde se mění charakter funkce „z rostoucí na klesající“, nastává ostré lokální maximum a v bodě, kde se mění charakter funkce „z klesající na rostoucí“, nastává ostré lokální minimum.
- 3) 7. Vypočteme f'' a $D(f'')$.
8. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná (předpokládáme přitom, že $D(f'')$ lze vyjádřit jako sjednocení disjunktních intervalů J_i a že f'' je spojitá na každém z těchto intervalů):
 - a) Určíme nulové body f'' , tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.
 - b) Každý interval J_i rozdělíme nulovými body f'' na disjunktní intervaly.
 - c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f'' v tomto bodě.
9. Určíme **intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní** (s využitím věty 9.28), a určíme **inflexní body** — v bodě $x_0 \in D(f)$ takovém, že $f'(x_0)$ existuje a navíc se mění konvexnost na konkávnost nebo naopak, nastává inflexe.
- 4) 10. Najdeme **asymptoty**:
 - a) Svislé asymptoty — *bez směřování* mohou nastat v bodech nespojitosti ležících v $D(f)$ nebo v hraničních (vlastních) bodech $D(f)$.
 - b) Asymptoty v $\pm\infty$. *se směřování*

I když k důkazu existence svislé asymptoty nám mnohdy stačí spočítat jen jednu jednostrannou limitu v bodě nespojitosti, kvůli načrtnutí grafu funkce je vhodné

spočítat obě jednostranné limity.

- (5) 11. Podle potřeby určíme další vlastnosti funkce f (průsečíky s osami, funkční hodnoty ve „významných bodech“, intervaly, na nichž je funkce kladná, resp. záporná, ...). ~~průběh funkce~~
12. Načtneme graf funkce f .

Poznámka 9.41. Je-li funkce sudá nebo lichá, musí všechny kořeny, intervaly, znaménka apod. vycházet v určitém smyslu souměrně. Můžeme tedy průběh takové funkce vyšetřovat pouze na „polovině“ definičního oboru.

Protože nakreslení grafu někdy dělá potíže, doporučujeme:

- nejprve vyznačit všechny asymptoty (pokud existují),
- vyznačit průsečíky grafu s osou x a funkční hodnoty v bodech lokálních extrémů,
- načrtnout si pomocný obrázek funkce f s ohledem na to, kde je funkce nad a kde pod osou x a kde roste a klesá (bez ohledu na „prohnutí“),
- načrtnout graf funkce f se všemi podstatnými kvalitativními rysy (včetně správného „prohnutí“ — tj. konvexnost a konkávnost).

Příklad 9.42. Vyšetřete průběh funkce $f: y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.



Řešení. Budeme postupovat podle uvedeného návodu.

- 1) 1. Jedná se o racionální lomenou funkci, která není definovaná pouze v kořenech jmenovatele.
Tyto kořeny určíme z rovnice:

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Tedy: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

2. Funkce f je spojitá v každém bodě $D(f)$.

3. Periodičnost. Funkce f není periodická, neboť pro každé $k \in \mathbb{R}^+$ existuje $x \in D(f)$ takové, že: $f(x+k) = \frac{(x+k)^3}{(x+k)^2-1} \neq f(x)$.

Sudost, lichost. Nechť $x \in D(f)$. Pak

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Funkce je lichá, její graf bude středově souměrný vzhledem k počátku. Tedy průběh funkce stačí vyšetřovat pouze na „polovině“ definičního oboru, tj. na množině $D^*(f) = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$.

Všechny další výpočty budeme proto provádět v rámci této „poloviny“ definičního oboru, tj. v rámci množiny $D^*(f) = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$. Chování funkce na „zbytku“ definičního oboru určíme nakonec právě z lichosti funkce f .

- 2) 4. Vypočteme f' a $D^*(f')$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}, \quad D^*(f') = D^*(f)$$

5. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná:

- a) Najdeme nulové body f' , tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0. \end{aligned}$$

Dostaneme tři nulové body

$$x_0 = -\sqrt{3}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{3}.$$

Jelikož $x_0 \notin D^*(f)$, nebudeme jej dále do svých výpočtů zahrnovat. Vráťme se k němu až na konci příkladu v bodě 10, kdy budeme kreslit graf funkce a z lichosti této funkce plyne, že chování funkce f v okolí bodu $x_0 = -\sqrt{3}$ se dá určit z chování funkce v okolí bodu $x_2 = \sqrt{3}$.

- b) Každý z intervalů tvořících $D^*(f') = \langle 0, 1 \rangle \cup (1, \infty)$ rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly.

$$(0, 1), \quad (1, \sqrt{3}), \quad (\sqrt{3}, \infty).$$

- c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f' v tomto bodě.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{9} < 0, \quad f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{25} < 0, \quad f'(2) = \frac{4}{9} > 0.$$

Dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je tedy funkce f' záporná na intervalech $(0, 1)$ a $(1, \sqrt{3})$ a kladná na intervalu $(\sqrt{3}, \infty)$.

6. Určíme intervaly monotonie a lokální extrémů. Funkce f je klesající na intervalech $(0, 1)$ a $(1, \sqrt{3})$ a rostoucí na intervalu $(\sqrt{3}, \infty)$. Tedy f má v bodě $x_2 = \sqrt{3}$ ostré lokální minimum:

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{3}{2}\sqrt{3}. \quad \text{(přibližně 2,598)}$$

Další lokální extrémů určíme v závěru příkladu z lichosti funkce.

- 3) 7. Vypočteme f'' a $D^*(f'')$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(x^2 - 1)[(4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - 4x(x^4 - 3x^2)]}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^5 - 6x^3 - 4x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}, \quad D^*(f'') = D^*(f). \end{aligned}$$

8. Určíme intervaly, na nichž je f'' kladná, resp. záporná.

a) Najdeme nulové body f'' , tj. řešíme rovnici $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0.$$

V reálném oboru existuje jediné řešení této rovnice, a to bod $x_1 = 0$.

b) Nyní máme rozdělit každý z intervalů tvořících $D^*(f'')$ nulovými body f'' na disjunktní intervaly. Vzhledem k tomu, že $x_1 = 0$ je krajní bod, dostáváme intervaly:

$$(0, 1), \quad (1, \infty).$$

c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f'' v tomto bodě.

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{208}{27} < 0, \quad f''(2) = \frac{28}{27} > 0.$$

Dle Caychyovy-Bolzanovy věty je tedy druhá derivace funkce f záporná na intervalu $(0, 1)$ a kladná na intervalu $(1, \infty)$.

9. Určíme intervaly, na nichž je funkce konvexní, resp. konkávní (s využitím věty 9.28), a inflexní body.

Funkce f je konkávní na intervalu $(0, 1)$ a konvexní na intervalu $(1, \infty)$.

Inflexní body mohou být pouze tam, kde se mění konvexnost a konkávnost funkce.

Na sjednocení intervalů $(0, 1) \cup (1, \infty)$ žádný inflexní bod není (bod 1 není bodem definičního oboru!), ale jelikož v tuto chvíli vyšetřujeme průběh funkce pouze na „polovině“ definičního oboru, zůstává otevřenou otázkou situace v bodě $x_1 = 0$.

10. Nyní máme najít asymptoty.

a) Svislé asymptoty: Funkce není definována v bodě $x_3 = 1$. Je spojitá v každém bodě $D^*(f)$. Tedy pouze tímto bodem může procházet svislá asymptota (situace se týká pouze „poloviny“ definičního oboru). Vypočteme jednostrannou limitu v bodě $x_3 = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Handwritten notes: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$

Tedy přímka $x = 1$ je svislou asymptotou grafu funkce f .

b) Asymptota v $+\infty$:

ASS:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3(1 - \frac{1}{x^2})} = 1 = a.$$

Koeficient $a \in \mathbb{R}$, lze tedy počítat druhou limitu. Vyjde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x}}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = 0 = b.$$

Asymptota v plus nekonečno má tedy rovnici $y = 1 \cdot x + 0$, tj. $y = x$.

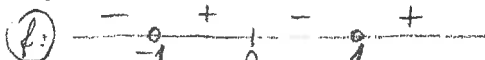
- 1-plot.) 11. Určíme nulové body funkce f a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná. Nejprve najdeme nulové body funkce f .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

tj. bod $x_1 = 0$ je nulovým bodem funkce f .

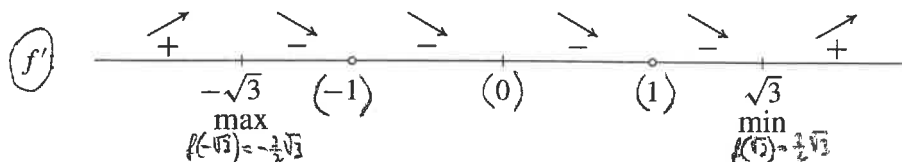
Funkce f je spojitá na intervalech $(0, 1)$ a na $(1, \infty)$, tudíž dle Cauchyovy-Bolzanovy věty stačí určit znaménko funkční hodnoty funkce f vždy v jednom z bodů jednotlivých intervalů $(0, 1)$, $(1, \infty)$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6} < 0, \quad f(2) = \frac{8}{3} > 0,$$

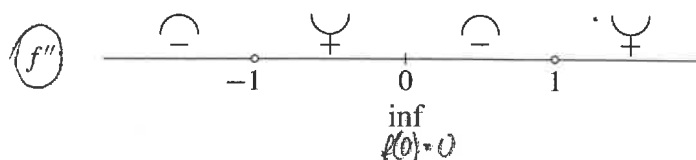
tedy f je záporná na $(0, 1)$ a kladná na $(1, \infty)$. 

12. Shrnutí předchozích výsledků a využitím lichosti funkce f dostaneme následující poznatky o vlastnostech funkce f :

- rostoucí části funkce na intervalu $(\sqrt{3}, +\infty)$ odpovídá rostoucí část funkce na intervalu $(-\infty, -\sqrt{3})$, klesající části funkce na intervalu $(1, \sqrt{3})$ odpovídá klesající část na intervalu $(-\sqrt{3}, -1)$ a klesající části na intervalu $(0, 1)$ odpovídá klesající část na intervalu $(-1, 0)$,
- ostrému lokálnímu minimu v bodě $x_2 = \sqrt{3}$ odpovídá ostré lokální maximum v bodě $x_0 = -\sqrt{3}$. Znaménka derivace a monotonií si vyznačíme nad číselnou osu:

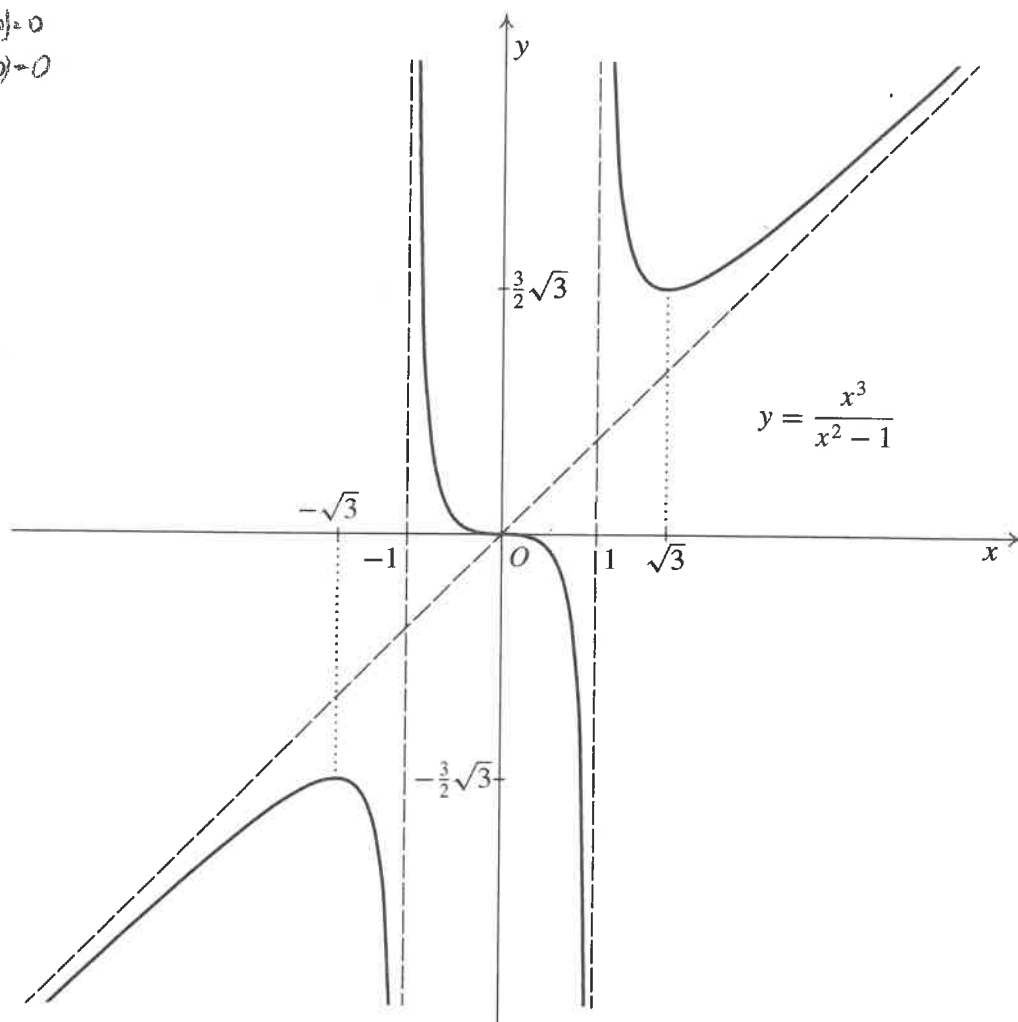


- konvexní části funkce na intervalu $(1, +\infty)$ odpovídá konkávní část funkce na intervalu $(-\infty, -1)$, konkávní části na intervalu $(0, 1)$ odpovídá konvexní část na intervalu $(-1, 0)$, tedy bod $x_1 = 0$ je inflexním bodem funkce f . Znaménka druhé derivace a konvexnost a konkávnost si vyznačíme opět nad číselnou osu:



$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$



Obr. 9.12

- svislé asymptotě $x = 1$ odpovídá svislá asymptota $x = -1$,
- asymptotě $y = x$ v plus nekonečnu odpovídá stejná asymptota $y = x$ v minus nekonečnu,
- záporné části na intervalu $(0, 1)$ odpovídá kladná část na intervalu $(-1, 0)$ a kladné části na intervalu $(1, \infty)$ odpovídá záporná část na intervalu $(-\infty, -1)$.

Ze všech získaných poznatků jsme již schopni zakreslit graf funkce f — viz obr. 9.12. ▲

Předchozí funkce měla všechny vlastnosti, které jsme se učili vyšetřovat (lokální extrémy, inflexní body, konvexní a konkávní části, svislé asymptoty, asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$). Je zřejmé, že vyšetřování průběhu takové funkce je pracné. Jestliže některá vlastnost chybí, je obvykle výpočet přiměřeně snazší. Každopádně je vidět, že k úspěšnému řešení takového komplexního příkladu je nezbytné umět řešit jednotlivé dílčí úlohy.